

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 1 martie 2008

Profil real, specializarea științele naturii

CLASA A XII A

1. Fie G mulțimea matricelor de forma $A_x = \begin{pmatrix} e^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde $x \in \mathbb{R}$. Să se demonstreze că, în raport cu înmulțirea matricelor, G formează un grup care este izomorf cu grupul aditiv al numerelor reale $(\mathbb{R}, +)$.
2. Considerăm șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit prin $a_n = \int_{\ln n}^{\ln(n+1)} e^{2x} dx$.
Să se arate că șirul dat este o progresie aritmetică, precizând primul termen și rația acesteia.
3. Se consideră $I_n = \int_1^2 \frac{x^n}{1+x^4} dx$, $n \in \{0, 1, 2, 3\}$.
 - a) Calculați I_1 și I_3 .
 - b) Considerând eventual $I_0 + I_2$ și $I_2 - I_0$, calculați I_0 și I_2 .
4. Fie \mathcal{P} mulțimea punctelor planului, iar $ABCD$ un dreptunghi din plan. Numim "transformare a dreptunghiului $ABCD$ " orice funcție $f: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ care asociază punctelor de pe dreptunghi tot puncte de pe dreptunghi.
 - a) Arătați că funcția identică I , simetriile S și T față de dreptele ce unesc mijloacele laturilor opuse, precum și simetria U față de centrul dreptunghiului, sunt transformări ale lui $ABCD$.
 - b) Să se demonstreze că mulțimea $\{I, S, T, U\}$ formează grup în raport cu compunerea funcțiilor. Este acest grup izomorf cu $(\mathbb{Z}_4, +)$?

Nota: Timp de lucru 3 ore

Toate subiectele sunt obligatorii

Fiecare subiect este notat de la 0 la 7